

Công thức Newton–Leibniz (tiếp theo) và công thức Green

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 11 tháng 12 năm 2025

Nhắc lại: Công thức Newton–Leibniz

Công thức Newton–Leibniz dành cho tích phân đường loại 2 (nghĩa là tích phân đường của trường vectơ $\vec{F}$) trong trường hợp $\vec{F}$ là một gradient của hàm một số thực f .

Giả sử r là một đường đi trơn từng khúc, bắt đầu ở A và kết thúc ở B . Cho f là một hàm thực trơn trên tập mở chứa vết của r . Khi đó,

$$\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A).$$

Trường bảo toàn

Một trường vectơ F được gọi là **bảo toàn** (conservative vector field) nếu có hàm thực f , gọi là một **hàm thế** (potential function) của F sao cho $\nabla f = F$.

Vectơ $\nabla f(x)$ đại diện cho đạo hàm $f'(x)$, vì thế ta có thể hiểu là $f' = F$ và hàm thế f là một “nguyên hàm” của hàm F .

Một trường bảo toàn còn được gọi là một **trường gradient**.

Ví dụ: Giả sử $c \in \mathbb{R}^n$ và F là trường vectơ trên $\mathbb{R}^n$ cho bởi $F(x) = c$. Xét hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = c \cdot x$. Ta dễ thấy $\nabla f = F$, nên F là một trường bảo toàn. □

Các hệ quả

Tích phân của trường bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi: *Nếu F là một trường bảo toàn, liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi trơn từng khúc trong D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường đi.*

Sự khác biệt với kết quả không phụ thuộc vào đường đi ở mục trước: ở đó với trường bất kì còn các đường đơn chính quy có cùng vết, trong khi ở đây trường là bảo toàn thì không có ràng buộc đơn, chính quy, hay cùng vết, chỉ có cùng điểm đầu và điểm cuối.

Tích phân của trường bảo toàn trên đường đi kín bằng 0: *Nếu F là một trường bảo toàn liên tục trên miền D thì tích phân của F trên một đường đi kín, trơn từng khúc trong D đều bằng 0.*

Điều này tương đương với *nếu có một đường đi C kín, trơn từng khúc trong D mà $\int_C F \cdot d\vec{s} \neq 0$, thì F không phải là trường bảo toàn.*

Ví dụ

Tính tích phân

$$\int_C y \, dx + (x + 6y) \, dy,$$

trong đó C là một đường đi từ $(1, 0)$ đến $(2, 1)$.

Lưu ý: Khi bài toán không chỉ rõ một đường đi cụ thể nào thì ta suy nghĩ đến trường đã cho là bảo toàn. Do đó, ta cần đi tìm hàm thế của trường.

Ta tìm một hàm thế cho trường $(y, x + 6y)$, tức là ta cần tìm hàm f sao cho

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (y, x + 6y) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 6y. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ nhất, lấy nguyên hàm hai vế theo x để có

$$f(x, y) = \int y \, dx = xy + D(y).$$

Thay vào phương trình thứ hai, ta được:

$$x + D'(y) = x + 6y \quad \Leftrightarrow \quad D'(y) = 6y,$$

tức là

$$D(y) = \int 6y \, dy = 3y^2 + E,$$

với E là hằng số. Như vậy,

$$f(x, y) = xy + 3y^2. \quad (\text{chọn } E = 0)$$

Áp dụng Định lý Newton–Leibniz, ta có

$$\begin{aligned}\int_C y \, dx + (x + 6y) \, dy &= \int_{(1,0)}^{(2,1)} \nabla(xy + 3y^2) \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{(1,0)}^{(2,1)} \nabla f \cdot d\vec{s} \\ &= (xy + 3y^2) \Big|_{(1,0)}^{(2,1)} \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 0 \\ &= 5.\end{aligned}$$



Ví dụ

Tìm công của trường lực $F(x, y, z) = (2, 3y, 4z^2)$ khi vật đi từ điểm $(1, 1, 1)$ đến điểm $(1, 0, 0)$.

Đề bài yêu cầu ta tính

$$W = \int_{(1,1,1)}^{(1,0,0)} F(x, y, z) \cdot d\vec{s}.$$

Ta tìm hàm thế $f(x, y, z)$ cho trường lực F , tức là:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= F(x, y, z) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ nhất, ta lấy nguyên hàm theo biến x để được:

$$f(x, y, z) = \int 2 \, dx = 2x + D(y, z).$$

Thay vào phương trình thứ hai, ta có:

$$\frac{\partial D}{\partial y}(y, z) = 3y.$$

Lấy nguyên hàm hai vế theo biến y để được:

$$D(y, z) = \int 3y \, dy = \frac{3y^2}{2} + E(z).$$

Như vậy, ta có:

$$f(x, y, z) = 2x + \frac{3y^2}{2} + E(z).$$

Thay vào phương trình thứ ba để được

$$E'(z) = 4z^2,$$

và lấy nguyên hàm hai vế, ta có:

$$E(z) = \int 4z^2 \, dz = \frac{4z^3}{3} + F.$$

Chọn hằng số $F = 0$ thì hàm thế là $f(x, y, z) = 2x + \frac{3y^2}{2} + \frac{4z^3}{3}$.

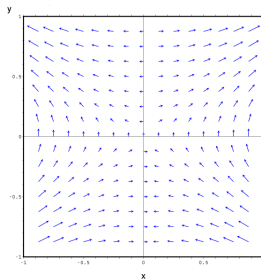
Áp dụng Định lý Newton–Leibniz, ta tính được

$$\begin{aligned} W &= \int_{(1,1,1)}^{(1,0,0)} F \cdot d\vec{s} = \int_{(1,1,1)}^{(1,0,0)} \nabla f \cdot d\vec{s} \\ &= f(1, 0, 0) - f(1, 1, 1) \\ &= 2 - \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = -\frac{17}{6}. \end{aligned}$$



Ví dụ

Dự đoán trường vectơ trong hình sau có bảo toàn quanh điểm giữa hay không?



Xét tất cả đường kín quanh điểm giữa, chẳng hạn đường tròn hay đường vuông, ta thấy chiều của các vectơ của trường lên mỗi đường khử nhau đôi một, do đó tích phân của trường dọc theo đường đó bằng 0.

Do đó ta dự đoán trường trong hình là bảo toàn.



Ý nghĩa vật lý của trường bảo toàn

Vì tích phân của trường trên một chuyển động là công của trường đóng góp vào chuyển động, nên công của một trường bảo toàn trên một chuyển động kín thì bằng 0. Điều này giải thích tên gọi “bảo toàn”.

Ví dụ (**trường trọng lực ở gần bề mặt Quả đất**): Xét vật có khối lượng m ở trong không gian gần bề mặt quả đất. Ta xấp xỉ trường trọng lực bằng cách giả sử trọng trường không đổi trong phần không gian này.

Nếu ta đặt trục z vuông góc với mặt đất, chỉ ra ngoài không gian, và gốc tọa độ trên mặt đất, thì trọng lực tác động lên vật là

$$\vec{F} = -mg\vec{k} = (0, 0, -mg),$$

trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là hằng số trọng trường gần mặt đất.

Ta tìm được hàm thế của trường này có dạng $f(x, y, z) = -mgz + C$, với C là hằng số thực. Trong vật lý, ta thường cho thế năng của vật ở phía trên mặt đất là dương, còn thế năng tại mặt đất bằng 0, nên thế năng của vật được cho bởi hàm $U(x, y, z) = mgz = -f(x, y, z)$.

Ví dụ: trường trọng lực tổng quát

Giả sử một vật có khối lượng M nằm ở gốc tọa độ trong $\mathbb{R}^3$, và một vật có khối lượng m nằm ở điểm $\vec{r} = (x, y, z)$.

Theo Định luật Vạn vật hấp dẫn của cơ học Newton, vật có khối lượng m sẽ chịu tác động của lực hấp dẫn từ vật có khối lượng M , và bằng

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{mMG}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = -\frac{mMG}{|\vec{r}|^3}(x, y, z)$$

với G là hằng số. Ta tìm một nguyên hàm f sao cho $\nabla f = F$, bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -mMG \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -mMG \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -mMG \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Lấy tích phân theo x từ phương trình thứ nhất để được

$$f(x, y, z) = \int -mMG \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx = \frac{mMG}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + C(y, z).$$

Thay vào hai phương trình còn lại, ta thấy $C(y, z)$ chỉ là một hằng số thực (*sinh viên tự kiểm tra*). Như vậy, *trường trọng lực là một trường bảo toàn* với hàm thế là

$$f(\vec{r}) = \frac{mMG}{|\vec{r}|} + C.$$



Năng lượng cơ học trong trường bảo toàn

Giả sử một vật chuyển động, ở vị trí $\vec{r}(t)$ tại thời điểm t , $t_0 \leq t \leq t_1$, dưới tác dụng của *tổng lực* $\vec{F}$.

Giả sử trường $\vec{F}$ là *bảo toàn* với f là một hàm thế (tức là $\nabla f = \vec{F}$).

Ta định nghĩa **động năng** (kinetic energy) (năng lượng từ chuyển động) của vật là

$$K(t) = \frac{1}{2}m|\vec{r}'(t)|^2;$$

và **thế năng** (potential energy) (năng lượng từ vị trí) của vật là $U = -f$. Như đã thấy trong trường hợp trọng trường, thế năng của Vật lý là đối của hàm thế của Toán. Theo Định lý Cơ bản của tích phân đường, ta có:

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{r}(t_1)) - f(\vec{r}(t_0)) = -U(\vec{r}(t_1)) + U(\vec{r}(t_0)),$$

tức là công của trường bằng đối của biến thiên thế năng.

Tiếp theo ta chứng minh tổng của động năng và thế năng

$$K(t) + U(\vec{r}(t)) = \frac{1}{2}m|\vec{r}'(t)|^2 - f(\vec{r}(t))$$

không đổi theo thời gian. Lấy đạo hàm theo t , ta có:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[K(t) + U(\vec{r}(t))] &= m\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) - \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \\ &= (m\vec{r}''(t) - \nabla f(\vec{r}(t))) \cdot \vec{r}'(t) \\ &= \left(m\vec{r}''(t) - \vec{F}(\vec{r}(t))\right) \cdot \vec{r}'(t),\end{aligned}$$

trong đó dấu “=” thứ nhất là bởi vì:

$$\left(|\vec{r}'|^2\right)' = (\vec{r}' \cdot \vec{r}')' = \vec{r}'' \cdot \vec{r}' + \vec{r}' \cdot \vec{r}'' = 2\vec{r}'' \cdot \vec{r}'.$$

Mặt khác, cơ học Newton cho ta sự liên hệ $\vec{F} = m\vec{a}$, nghĩa là $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{r}''(t)$.

Thay vào đẳng thức trên để được

$$\frac{d}{dt}[K(t) + U(\vec{r}(t))] = 0,$$

nghĩa là

$$K(t) + U(\vec{r}(t)) = K(t_0) + U(\vec{r}(t_0)) = K(t_1) + U(\vec{r}(t_1))$$

không đổi với mọi t . Do đó, *tổng động năng và thế năng, tức năng lượng cơ học, là không đổi trong quá trình chuyển động dưới tác động của một trường bảo toàn.* □

Đẳng thức trên cũng cho ta kết quả:

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -U(\vec{r}(t_1)) + U(\vec{r}(t_0)) = K(t_1) - K(t_0),$$

nghĩa là công của trường bảo toàn bằng biến thiên động năng của vật.

Chương: Công thức Green

Nhắc lại: Giả thiết D là miền đơn giản

Trong phần này ta chỉ làm việc trên mặt phẳng Euclid hai chiều $\mathbb{R}^2$.

Giả sử D là một miền đơn giản theo cả hai chiều có biên trơn từng khúc trên $\mathbb{R}^2$.

Một cách cụ thể, nếu D là *miền đơn giản theo chiều thẳng đứng*, thì

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là hàm trơn.

Nếu D là *miền đơn giản theo chiều nằm ngang*, thì

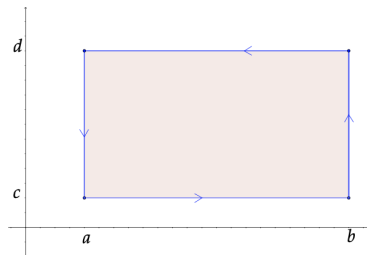
$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq k(y)\},$$

trong đó $h(y)$ và $k(y)$ là hàm trơn.

Dẫn nhập

Ta xét trường hợp hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ với biên được định hướng như hình bên.

Giả sử (P, Q) là một trường vectơ tron trên một tập mở chứa hình chữ nhật này.



Hình: Một hình chữ nhật với định hướng biên tương thích.

Ta tính các tích phân sau:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad \text{và} \quad \iint_{[a,b] \times [c,d]} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Áp dụng công thức Fubini và Newton–Leibniz để có:

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b] \times [c,d]} \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \, dy \right) \, dx \\&= \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)] \, dx \\&= \int_a^b P(x, d) \, dx - \int_a^b P(x, c) \, dx, \\ \iint_{[a,b] \times [c,d]} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \, dx \right) \, dy \\&= \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] \, dy \\&= \int_c^d Q(b, y) \, dy - \int_c^d Q(a, y) \, dy.\end{aligned}$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên để được

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy &= \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy \\ &\quad - \int_a^b P(x, d) dx - \int_c^d Q(a, y) dy. \end{aligned}$$

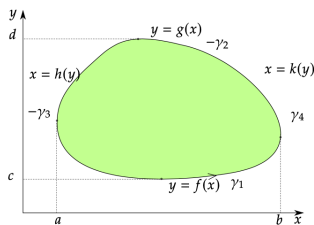
Đây là tích phân đường của trường (P, Q) dọc theo các cạnh biên của hình chữ nhật vì:

$$\int_a^b Q(x, c) dy = \int_a^b Q(x, d) dy = \int_c^d P(a, y) dx = \int_c^d P(b, y) dx = 0.$$

Như vậy ta tìm được một công thức liên hệ một tích trên bội hai trên một hình chữ nhật với một tích phân đường trên biên của hình chữ nhật. Đây được gọi là một công thức Green.

Hướng tương thích với miền

Miêu tả trực quan của **định hướng tương thích của biên** là: biên được định hướng sao cho khi đi trên biên thì *miền nằm bên tay trái*; hoặc: đặt bàn tay phải theo hướng của biên thì miền nằm ở phía lòng bàn tay.



∂D được định hướng cùng chiều với định hướng của các đường đi $\gamma_1(x) = (x, f(x))$, $a \leq x \leq b$ và đường $-\gamma_2$ với $\gamma_2(x) = (x, g(x))$, $a \leq x \leq b$. Có thể kiểm tra rằng đây cũng là định hướng của đường $-\gamma_3$ với $\gamma_3(y) = (h(y), y)$, $c \leq y \leq d$, và đường γ_4 với $\gamma_4(y) = (k(y), y)$.

Công thức Green (Định lý Green)

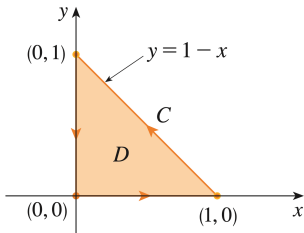
Cho D là một miền đơn giản theo cả hai chiều với biên trơn từng khúc được *định hướng tương thích*. Giả sử $\vec{F} = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên một tập mở chứa D . Khi đó,

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] \, dx \, dy.$$

Công thức Green cho một quan hệ giữa tích phân trên một miền với tích phân trên biên của miền đó, giống như Công thức Newton–Leibniz nhưng ở một chiều cao hơn.

Ví dụ

Tính tích phân $\int_C x^4 dx + xy dy$, trong đó C là đường biên của hình tam giác nối các đỉnh từ $(0,0)$ đến $(1,0)$, từ $(1,0)$ đến $(0,1)$, và từ $(0,1)$ đến $(0,0)$.



Gọi D là miền hình tam giác tạo bởi các đỉnh $(0,0)$, $(1,0)$, và $(0,1)$. Miền D được bao bởi các đường thẳng $y = 1 - x$, $x = 0$, và $y = 0$.

Đường biên C của D có hướng tương thích với D . Đặt $P = x^4$ và $Q = xy$. Áp dụng công thức Green, ta có:

$$\begin{aligned}\int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Kiểm tra lại: ta tính tích phân trên từng đường gấp khúc của C rồi cộng kết quả lại.

- Tham số đường thẳng từ $(0, 0)$ đến $(1, 0)$ là $r_1(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$:

$$\int_{r_1} x^4 dx + xy dy = \int_0^1 t^4 \cdot 1 dt = \frac{1}{5}.$$

- Tham số đường thẳng từ $(1, 0)$ đến $(0, 1)$ là $r_2(t) = (t, 1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned} - \int_{r_2} x^4 dx + xy dy &= - \int_0^1 (t^4, t(1 - t)) \cdot (1, -1) dt \\ &= - \int_0^1 (t^4 - t + t^2) dt \\ &= -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

- Tham số đường thẳng từ $(0, 1)$ đến $(0, 0)$ là $r_3(t) = (0, t)$, $0 \leq t \leq 1$:

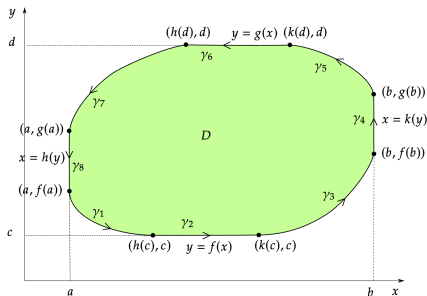
$$-\int_{r_3} x^4 \, dx + xy \, dy = -\int_0^1 0 \, dt = 0.$$

Như vậy, ta có kết quả:

$$\int_C x^4 \, dx + xy \, dy = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} + 0 = \frac{1}{6}.$$



Chứng minh



Ta xem D là miền đơn giản theo chiều đứng. Do các đạo hàm riêng của trường là liên tục trên D nên công thức Fubini cho

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=f(x)}^{y=g(x)} dx \\
 &= \int_a^b P(x, g(x)) dx - \int_a^b P(x, f(x)) dx \\
 &= - \int_{\gamma_5 \cup \gamma_6 \cup \gamma_7} P dx - \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} P dx = - \int_{\partial D} P dx
 \end{aligned}$$

$$\text{vì } \int_{\gamma_4} P dx = \int_{\gamma_8} P dx = 0.$$

Tương tự, ta xem D là miền đơn giản theo chiều ngang để thu được

$$\int_{\partial D} Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dA.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta kết luận

$$\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

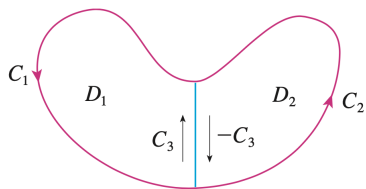
Phần kiểm tra định hướng trên biên có thể tham khảo trong giáo trình.



Công thức Green cho miền không đơn giản

Đối với một miền không đơn giản nhưng có thể được phân chia thành hội của hữu hạn những miền đơn giản với những phần chung chỉ nằm trên biên, ta có thể áp dụng công thức Green cho từng miền đơn giản rồi cộng lại.

Ví dụ, xét miền D như trong hình sau:



Ta có thể viết $D = D_1 \cup D_2$, với D_1 và D_2 là miền đơn giản. Ta có:

$$\partial D_1 = C_1 \cup C_3 \quad \text{và} \quad \partial D_2 = C_2 \cup (-C_3).$$

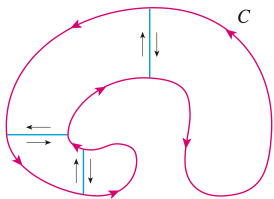
Áp dụng Định lý Green trên từng miền D_1 và D_2 , ta có:

$$\begin{aligned}\int_{C_1 \cup C_3} P \, dx + Q \, dy &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA, \\ \int_{C_2 \cup (-C_3)} P \, dx + Q \, dy &= \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA.\end{aligned}$$

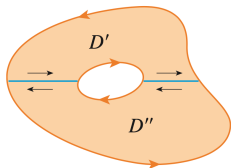
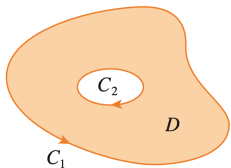
Cộng hai phương trình này lại, ta thấy tích phân trên đường C_3 và $-C_3$ rút gọn, nên ta chỉ còn lại:

$$\int_{C_1 \cup C_2} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dA.$$

Đây là công thức Green cho miền $D = D_1 \cup D_2$ vì biên $\partial D = C_1 \cup C_2$.



Lý luận tương tự, ta có thể thiết lập công thức Green cho miền D là hội của hữu hạn những miền đơn giản không trùng lấp.

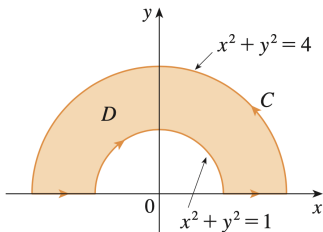


Nếu miền D có lỗ ở giữa thì công thức Green vẫn có thể được áp dụng bằng lý luận tương tự.

Ngày nay công thức Green thường được xét như là một trường hợp riêng của công thức Stokes tổng quát nhiều chiều.

Ví dụ

Tính tích phân $\int_C y^2 dx + 3xy dy$, trong đó C là biên của miền D nằm nửa trên mặt phẳng $y \geq 0$ và giữa hai hình tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$ với hướng tương thích với D .



Ta thấy miền D không phải là miền đơn giản. Tuy nhiên, ta có thể dùng trục Oy để chia D thành hai miền đơn giản như lý luận ở phần trên để từ đó Định lý Green vẫn có thể được áp dụng.

Áp dụng công thức Green, ta có:

$$\int_C y^2 dx + 3xy dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA = \iint_D y dA.$$

Ở đây, đường cong C đã có định hướng tương thích với D .

Miền D nằm giữa hai nửa hình tròn bán kính lần lượt là 1 và 2, nên ta biểu diễn D trong hệ tọa độ cực $x = r \cos \theta$ và $y = r \sin \theta$

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

và tích phân trở thành:

$$\int_0^\pi \int_1^2 (r \sin \theta) r \, dr \, d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_1^2 r^2 \, dr = \frac{14}{3}.$$

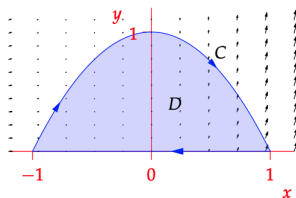


Ví dụ: Khi hướng không tương thích với miền

Tính tích phân

$$\int_C \left(e^{x^2} + y \right) dx + \left(e^{2x} - y \right) dy,$$

trong đó C là đường đi gồm: parabola $y = 1 - x^2$ và trục x . Hướng của C là theo chiều kim đồng hồ.



Gọi D là miền bị chặn bởi đường cong C và định hướng ∂D tương thích với D . Vì C không có hướng tương thích với D nên công thức Green cho ta:

$$\begin{aligned}& \int_C \left(e^{x^2} + y \right) dx + \left(e^{2x} - y \right) dy \\&= - \int_{\partial D} \left(e^{x^2} + y \right) dx + \left(e^{2x} - y \right) dy \\&= - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2x} - y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{x^2} + y \right) \right] dA \\&= - \iint_D \left(2e^{2x} - 1 \right) dA \\&= - \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \left(2e^{2x} - 1 \right) dy dx \\&= \frac{4}{3} - \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^2.\end{aligned}$$



Ví dụ: Khi đường C không kín

Gọi C là đoạn thẳng gấp khúc từ gốc tọa độ đến $(1, 2)$ và đến $(3, 0)$. Tính

$$\int_C \left(e^{y^2} - 2y \right) dx + \left(2xye^{y^2} + \sin(y^2) \right) dy$$

sử dụng công thức Green.

Đường C không phải kín nên công thức Green không thể được áp dụng trực tiếp. Gọi C_1 là đoạn thẳng từ $(3, 0)$ đến gốc tọa độ.

Khi đó, C và C_1 tạo thành một đường cong kín theo chiều kim đồng hồ. Gọi D là miền bị chặn bởi $C \cup C_1$, và ∂D có hướng tương thích với D .

Đặt $\vec{F}(x, y) = \left(e^{y^2} - 2y \right) \vec{i} + \left(2xye^{y^2} + \sin(y^2) \right) \vec{j}$.

Vì $C \cup C_1$ trái định hướng với ∂D , nên công thức Green cho:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= - \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (2xye^{y^2} + \sin(y^2)) - \frac{\partial}{\partial y} (e^{y^2} - 2y) \right] dA \\ &= - \iint_D 2 dA = -2|D|.\end{aligned}$$

Vì D là hình tam giác, nên $|D| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$. Vì vậy, nếu ta có tham số $C_1(x) = (x, 0)$, $0 \leq x \leq 3$, thì

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= -6 - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= -6 - \left(- \int_0^3 \vec{F} \cdot (1, 0) dx \right) \\ &= -6 + \int_0^3 dx = -3.\end{aligned}$$



Điều kiện để trường vectơ phẳng là bảo toàn

Trong chương trước, ta biết rằng một trường $\vec{F}$ là bảo toàn khi và chỉ khi tồn tại một hàm thực f (gọi là hàm thế) sao cho $\nabla f = \vec{F}$ (cùng miền xác định). Trong phần này, ta sẽ tìm hiểu thêm các điều kiện để trường vectơ là bảo toàn.

Định lý (Điều kiện cần để trường bảo toàn)

Nếu trường $F = (P, Q)$ trơn và *bảo toàn* trên một tập mở chứa tập D thì trên D ta phải có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ví dụ

Trường vectơ

$$\vec{F} = (P, Q) := (y, x + 6y)$$

là bảo toàn trên $D := \mathbb{R}^2$ vì có hàm thế $f(x, y) = xy + 3y^2$ với $\nabla f = \vec{F}$ trên D .

Ngoài ra, P và Q là đa thức của x và y nên là hàm trơn, và thỏa

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad \text{và} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$$

nghĩa là $P_y = Q_x$ trên D .



Chứng minh

Giả sử f là hàm thế của F . Khi đó,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \text{và} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

Theo giả thiết P và Q là hàm trơn trên D nên các đạo hàm riêng của chúng tồn tại trên D , và ta có:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{và} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Mặt khác, định lý Clairaut cho ta $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ tồn tại và liên tục, nên chúng bằng nhau. Do đó, ta kết luận:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$



$$\text{Trường } \vec{F} \text{ là bảo toàn} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

và ta thường sử dụng mệnh đề phản đảo để chứng minh một trường không là bảo toàn: nếu điều kiện $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ không thỏa thì trường không thể bảo toàn.

Ví dụ: Trường $\vec{F} = (P, Q) := (2y, x)$ có

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad \neq \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

nên $\vec{F}$ không bảo toàn.

Điều kiện cần nhưng chưa đủ

Nếu trường $\vec{F} = (P, Q)$ trơn trên một tập mở chứa tập D , và trên D ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

thì trường $\vec{F}$ có bảo toàn hay không? Chưa hẳn.

Ví dụ ($P_y = Q_x$ cần nhưng không đủ) Xét trường

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ta có:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{và} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

nên $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trên $\mathbb{R}^2$ bỏ đi điểm $(0, 0)$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\vec{F}$ là không bảo toàn bằng cách sử dụng tính chất “nếu có một đường đi kín C trơn từng khúc trong D mà $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$, thì $\vec{F}$ không phải là trường bảo toàn”.

Cho C là đường tròn đơn vị tâm O , ngược chiều kim đồng hồ với tham số:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

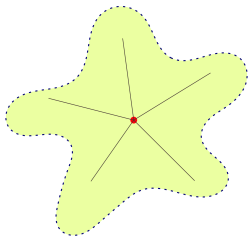
Tích phân là:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Như vậy, $\vec{F}$ không phải là một trường vectơ bảo toàn trên miền xác định của nó. □

Điều kiện đủ để trường vectơ phẳng là bảo toàn

Một tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một **miền hình sao** (star-shaped region) nếu có một điểm $p_0 \in D$ sao cho với mọi điểm $p \in D$ thì đoạn thẳng nối p_0 và p được chứa trong D .



Ví dụ:

- $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao.
- Một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao.
- $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ không là miền hình sao.

Định lý (điều kiện đủ để trường là bảo toàn, Bổ đề Poincaré)

*Giả sử $\vec{F} = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên miền mở hình sao D .
Nếu*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

trên D , thì trường $\vec{F}$ là bảo toàn trên D .

Chứng minh

Ta dùng ký hiệu

$$\int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s}$$

để chỉ tích phân của F trên đoạn thẳng nối từ điểm p_0 đến điểm p với phương trình tham số

$$(1-t)p_0 + tp = p_0 + t(p - p_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Đặt

$$f(p) = \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s}.$$

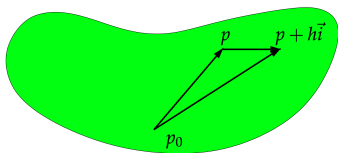
Ta thấy f đóng vai trò như một hàm thế của F . Ta cần chứng minh $\nabla f = F = (P, Q)$ trên D .

Ta sẽ kiểm tra rằng $\frac{\partial f}{\partial x} = P$. Phần chứng minh $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ là tương tự.

Theo định nghĩa đạo hàm, với $\vec{i} = (1, 0)$, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h\vec{i}) - f(p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s} \right).\end{aligned}$$

Vì miền D mở nên điểm $p + h\vec{i}$ sẽ nằm trong D nếu h đủ nhỏ.



Nếu ba điểm p_0 , p , và $p + h\vec{i}$ không nằm trên một đường thẳng, thì chúng tạo thành một hình tam giác D' . Vì hình tam giác là một miền đơn giản nên ta có thể áp dụng Định lý Green.

$$\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_p^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s} = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Theo giả thiết, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, nên vế phải của đẳng thức là 0. Do đó, ta có:

$$\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s} = \int_p^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s}.$$

Nếu ba điểm p_0 , p , và $p + h\vec{i}$ thẳng hàng, thì đẳng thức này vẫn đúng theo tính chất của tích phân.

Viết $p = (x, y)$ và chọn tham số hóa đường thẳng đi từ p đến $p + h\vec{i}$ là

$$r(t) = (x + t, y), \quad 0 \leq t \leq h.$$

Khi đó, ta được

$$\int_p^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} = \int_x^{x+h} P(t, y) dt,$$

nên

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{p_0}^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} - \int_{p_0}^p F \cdot d\vec{s} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_p^{p+h\vec{i}} F \cdot d\vec{s} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(t, y) dt. \end{aligned}$$

Ta tiếp tục viết lại đẳng thức:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(t, y) \, dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_x^{x+h} P(t, y) \, dt - \int_x^x P(t, y) \, dt \right] \\ &= \frac{d}{du} \int_x^u P(t, y) \, dt \Big|_{u=x} \\ &= P(x, y)\end{aligned}$$

theo Định lý cơ bản của Vi tích phân. Đây là điều cần chứng minh. □

Ví dụ

Trường $F(x, y) = (e^{x^2}, y^3)$ có bảo toàn hay không?

Ta thấy miền xác định của trường là $\mathbb{R}^2$, một miền hình sao, và

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{x^2}) = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (y^3) = 0.$$

Do đó, trường F là bảo toàn trên $\mathbb{R}^2$ theo Bổ đề Poincaré.



Ghi chú

Nếu một trường $F = (P, Q)$ có $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nhưng lại không bảo toàn, thì Bổ đề Poincaré cho ta biết miền xác định của F không phải là một miền hình sao.

Điều này mang ý nghĩa một giả thiết giải tích đưa đến một kết luận hình học.

Kết luận của Bổ đề Poincaré vẫn đúng nếu thay miền hình sao bởi miền tổng quát hơn gọi là *miền đơn liên*, đại khái là miền chỉ gồm một mảnh không có lỗ thủng.